

# TMO2020

筑駒数学科学研究会

October 2020

1.  $1^n + 2^n + \dots + 9^n$  の最高位が 9 となるような 2020 以下の正整数  $n$  はいくつ存在するか。ただし、 $\log_{10}3 = 0.477121$  とする。

2.  $f(x)$  を、 $[x/i]$  ( $i$  は正整数) としてありうる値の種類数として定義する。このとき、 $f(x) = 69$  なる正整数  $x$  はいくつ存在するか。ただし、 $[a]$  で  $a$  を超えない最大の整数を表すものとする。

3.  $f(n) = \sum_{k=0}^{\infty} [\frac{n}{k^2}]$  について、 $f(n+1) - f(n) = 2020$  なる最小の  $n$  はいくつか？

4. 凸五角形  $ABCDE$  は  $AB = BC = CD = DE$ , 角  $ABD = 54^\circ$ , 角  $BCE = 102^\circ$ , 角  $ADE = 12^\circ$  をみたしている。このとき、 $AE$  の長さを求めよ。

5.  ${}_n P_n$  が 2020 の倍数となるような 5 番目に小さい正整数  $n$  を求めよ。

6.  $f(f(n)) = f(n) + n$  なる狭義単調増加関数  $f : N \rightarrow N$  について、集合  $f(1), \dots, f(2584)$  として考えられるものは何通りか。ただし、 $N$  で正整数全体の集合を表すものとする。

7.  $N$  個の石がある。先手太郎と後手次郎は以下のようなゲームをする。

はじめ、先手次郎は石を 1 個まで取れる。次に、後手次郎は石を 2 個まで取れる。 $i$  ターン目には 1 個以上  $i$  個以下の石を取れる。最後の 1 個の石を取った方がゲームに勝利する。

1 以上 2020 以下の整数  $N$  に対して、先手次郎がゲームに勝利するような  $N$  はいくつ存在するか。

8. あなたは中高数学科学研究会に大衆賞を投票する。YES か NO か。(昨年度の正答率:100)

9. 正整数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  で  $\sum_{k=1}^n x_k = 10$  なるもの全体について、積  $x_1 \dots x_n$  を足し合わせた値を求めよ。

10.  $n$  を正整数とする。  $n$  桁の、各桁が  $0, 1$  のいずれかを表示する電光掲示板がある。1 桁数字を変えるたびに電気代 1 ドルがかかる。かかる電気代を最小にして  $0, \dots, 2^n - 1$  までの整数を 1 度ずつ表示する方法は何通りあるか。

11.  $n$  次対称群  $S_n$  上の  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  値関数  $f$  で  $f(gh) = gf(h) + f(g)$  なるものについて、 $\sum_{g \in \Gamma S_n} f(g)$  として考えられる値を全て求めよ。

12. 次の数列はある規則性に基づいている。四角に入る数を求めよ。1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, , 70